**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Асимптотический анализ и теория вероятностей

Asymptotic Analysis and Probability Theory

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 3

Регистрационный номер рабочей программы: 027260

Санкт-Петербург

2020

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Дисциплина «Асимптотический анализ и теория вероятностей» представляет обучающимся комплекс знаний, умений и навыков по математическим дисциплинам, которые понадобятся им для успешного прослушивания других курсов в программе. Такие знания необходимы для ведения полноценной исследовательской деятельности.

Основным методологическим принципом построения программы курса является принцип поэтапного системного накопления знаний и формирования необходимых компетенций по модели: от простого и/или знакомого – к сложному и/или незнакомому.

Цель изучения дисциплины: обучение основам таких дисциплин, как теория множеств, логика, элементарная комбинаторика, асимптотические оценки и производящие функции, теория графов, теория вероятности; формирование навыка самостоятельного решения задач; формирование навыка постановки задач на математическом языке.

**1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Программа курса предназначена для обучающихся 1 курса магистратуры и рассчитана на обучающихся, изучавших основы математических дисциплин в объеме четырех курсов бакалавриата.

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

**1.3.1. Компетенции, развиваемые дисциплиной**

* ОПК-1 Способен находить, формулировать и решать актуальные проблемы фундаментальной и прикладной информатики и информационных технологий.
* ПКА-1 Способен находить, формулировать и решать актуальные проблемы фундаментальной и прикладной информатики и информационных технологий.
* ПКП-1 Способен демонстрировать фундаментальные знания математических и естественных наук, программирования и информационных технологий.
* ПКП-4 Способен преподавать дисциплины математики и информатики в различных учебных заведениях на основе полученного фундаментального образования и научного мировоззрения.
* ПКП-6 Способен использовать основные методы и средства автоматизации проектирования, реализации, испытаний и оценки качества при создании конкурентоспособного программного продукта и программных комплексов, а также способен использовать методы и средства автоматизации, связанные с сопровождением, администрированием и модернизацией программных продуктов и программных комплексов.
* ПКП-7 Способен использовать знания направлений развития компьютеров с традиционной (нетрадиционной) архитектурой; современных системных программных средств: операционных систем, операционных и сетевых оболочек, сервисных программ; тенденции развития функций и архитектур проблемно-ориентированных программных систем и комплексов в профессиональной деятельности.
* ПКП-8 Способен использовать основные концептуальные положения функционального, логического, объектно-ориентированного и визуального направлений программирования, методы, способы и средства разработки программ в рамках этих направлений.

**1.3.2. Знания, умения и навыки, формируемые дисциплиной**

Основной целью курса является знакомство обучающихся с основными методами асимптотического анализа, а именно:

* обучение обучающихся основам таких дисциплин, как теория множеств, логика, элементарная комбинаторика, асимптотические оценки и производящие функции, теория графов, теория вероятности;
* формирование навыка самостоятельного решения задач;
* формирование навыка постановки задач на математическом языке.

**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

Практические занятия и устная проверка домашних работ – 20 академических часов в осеннем семестре.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т. п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | Трудоёмкость |
| лекции | семинары | консультации | Практические занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | текущий контроль (сам. раб.) | промежуточная аттестация (сам. раб.) | итоговая аттестация  (сам. раб.) |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 1 | 15 | 15 | 2 |  |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 38 |  | 36 |  | 20 | 3 |
|  | 1-100 | 1-30 | 1-30 |  |  |  |  |  | 1-30 |  |  |  | 1-1 |  | 1-1 |  |  |  |
| ИТОГО | 15 | 15 | 2 |  |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 38 |  | 36 |  | 20 | 5 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | |
| Формы | Сроки | Виды | Сроки | Виды | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | |
| Семестр 1 |  |  | экзамен, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации |  |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Наименование темы (раздела, части) | Вид учебных занятий | Количество часов |
| I | Теория множеств | лекции | 2 |
| практические занятия | 2 |
| по методическим материалам | 2 |
| II | Асимптотический анализ | лекции | 7 |
| практические занятия | 7 |
| по методическим материалам | 16 |
| III | Теория вероятностей | лекции | 6 |
| практические занятия | 6 |
| по методическим материалам | 20 |
|  | Промежуточная аттестация | самостоятельная работа | 36 |
| консультации | 2 |
| экзамен | 2 |
| **Итого** | | | **108** |

**2.2.1 Содержание учебных занятий**

Темы для изучения и обсуждения

1. *Теория множеств*. Основные понятия теории множеств. Бинарные отношения и функции. Рефлексивность, симметричность, транзитивность. Взаимно-однозначные соответствия. Счетные множества.

2. *Элементарный асимптотический анализ*. Асимптотики сумм и рекуррентных последовательностей. Теорема Штольца. Оценки и асимптотики для комбинаторных величин. Элементарные оценки факториалов, биномиальных коэффициентов. Формула Стирлинга.

3. *Оценки и асимптотики для комбинаторных величин*. Понятие об энтропии. Асимптотики для биномиальных коэффициентов и прочее. Оценки сумм биномиальных коэффициентов. Замена сумм интегралами в асимптотических оценках. Преобразование Абеля.

4. *Рекуррентные соотношения*. Рекуррентные соотношения и производящие функции. Числа Фибоначчи. Формула Бинэ и матричное представление чисел Фибоначчи. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Применение производящих функций для решения рекуррентных соотношений.

5. *Производящие функции*. Применение степенных рядов и производящих функций для доказательства комбинаторных тождеств. Производящие функции для биномиальных коэффициентов. Произведение Адамара. Взаимно рекуррентные последовательности.

6. *Экспоненциальные производящие функции*. Экспоненциальные производящие функции. Формальная связь с обычными производящими функциями. Факториальные степени. Числа Стирлинга и их применение. Числа Белла.

7. *Числа и многочлены Бернулли*. Числа и многочлены Бернулли. Формула суммирования Эйлера–Маклорена.

8. *Необходимые сведения из математического анализа*. Сигма-алгебра. Мера. Теорема Каратеодори. Теорема Лебега о разложении меры. Теорема Радона-Никодима.

9. *Основы теории вероятностей*. Дискретная вероятность. Классическое определение вероятности. Условные вероятности. Независимость событий. Формулы полной вероятности и Байеса. Схема Бернулли. Полиномиальная схема. Случайные графы и множества. Приложения к комбинаторике.

10. *Случайные величины*. Функции распределения. Независимые случайные величины. Математическое ожидание и дисперсия. Неравенства Маркова, Чебышёва и Чернова.

11. *Предельные теоремы*. Ковариация и коэффициент корреляции. Независимость и некоррелированность случайных величин. Приложения случайных величин к комбинаторике и теории чисел. Закон больших чисел для схемы Бернулли. Локальная и интегральная предельные теоремы Муавра–Лапласа для схемы Бернулли. Теорема Пуассона.

12. *Геометрическая вероятность*. Парадокс Бертрана. Метод Монте-Карло. Абсолютно непрерывные распределения. Основные виды распределений. Числовые характеристики распределений: математическое ожидание, дисперсия, моменты, факториальные моменты. Совместные распределения. Ковариация и корреляция.

13. *Центральная предельная теорема*. Производящие функции и характеристические функции случайных величин.

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

Успешное освоение дисциплины возможно благодаря посещению лекций и практических занятий, участию в обсуждении рассматриваемых вопросов, самостоятельной работе, включающей в себя чтение специальной литературы по разделам темы.

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

Самостоятельная работа обучающихся, как вид деятельности, стимулирующий активность, самостоятельность, познавательный интерес с целью поиска необходимой информации, приобретения знаний, использования этих знаний для решения учебных, научных и профессиональных задач, представляет собой важную составляющую учебного процесса, которой отводится не менее половины учебного времени при очной форме обучения. Время, отводимое на самостоятельную работу, должно использоваться обучающимися для наиболее полного освоения учебной дисциплины. Следовательно, организация эффективной внеаудиторной самостоятельной работы в процессе обучения требует создания условий, призванных обеспечить рациональное и планомерное управление учебной деятельностью, протекающей в отсутствие преподавателя.

К числу методических пособий относятся:

- задания для самостоятельного выполнения;

- литература по теме курса;

- видеокурс «Асимптотический анализ и теория вероятностей».

Роль преподавателя в организации самостоятельной работы состоит в координации действий обучающихся в освоении дисциплины, в методическом и организационном обеспечении учебного процесса. Взаимодействие между преподавателем и обучающимся осуществляется в форме консультаций, а также через сайт поддержки курса. Преподаватели также оказывают помощь обучающимся по планированию и организации самостоятельной работы.

**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

**3.1.3.1. Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации**

Обучающийся может быть аттестован по результатам работы в течение семестра либо по результатам экзамена по выбору самого обучающегося.

*Методика проведения работы в течение семестра*

Обучающимся выдается блок задач либо на доказательство, либо на программирование. Каждая задача оценивается в определенное количество баллов, зависящее от сложности и важности задачи. Для получения баллов обучающийся должен устно продемонстрировать понимание условия и решения задачи. При этом от обучающихся не требуется решать домашние задачи на доказательство самостоятельно, однако все задачи на программирование должны быть реализованы лично сдающим.

Для каждой задачи устанавливается срок, в течение которого она может быть принята. По истечении указанного срока задача больше не принимается. Также для каждой задачи устанавливается максимальное число попыток сдачи, при исчерпании которого обучающийся больше не может ее сдавать.

В зависимости от качества ответа или программной реализации допускается увеличивать либо уменьшать количество баллов. Например, за грамотное использование CI/CD начисляются дополнительные баллы, а за код низкого качества баллы снимаются.

Для проверки решений задач преподаватель может приглашать других лиц с квалификацией не ниже изложенной в п. 3.2.1.

*Методика проведения экзамена*

Экзамен проводится в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 60 минут.

Использование конспектов, учебников, прочих источников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена не разрешается. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт, и обучающийся удаляется с экзамена.

После ответа на вопросы билета, преподаватель вправе задать дополнительные вопросы по любой теме из списка вопросов, вынесенных на экзамен, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена. В качестве дополнительных используются вопросы, не требующие длительного вывода, в том числе основные определения, примеры и логические связи, введенные в дисциплине.

По желанию преподавателя на экзамен допустимо приглашать других преподавателей с квалификацией не ниже изложенной в п. 3.2.1 как для независимого оценивания ответов обучающихся, так и для коллегиального. В последнем случае оценка за экзамен ставится на основании голосования простого большинства. В спорных ситуациях преподаватель, ведущий дисциплину, имеет право принятия окончательного решения.

**3.1.3.2. Критерии оценивания итогового процента освоения дисциплины**

В случае выбора обучающимся аттестации по результатам экзамена, на экзамене обучающемуся задаётся два вопроса по билету и от одного до трёх дополнительных вопросов. Каждый ответ оценивается по шкале от 0 (нет ответа) до 10 (очень хороший ответ), результирующий процент выполнения целей обучения определяется как среднее полученных за ответы оценок, переведённых в диапазон от 0 до 100.

В случае демонстрации непонимания понятий и утверждений из списка обязательных, обучающийся немедленно получается оценку «неудовлетворительно» (F).

Итоговая оценка рассчитывается из суммы всех полученных баллов согласно таблице:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Итоговый процент  выполнения, % | Оценка СПбГУ при  проведении экзамена | Оценка  ECTS |
| 90-100 | отлично | A |
| 80-89 | хорошо | B |
| 70-79 | хорошо | C |
| 61-69 | удовлетворительно | D |
| 50-60 | удовлетворительно | E |
| менее 50 | неудовлетворительно | F |

В случае выбора обучающимся аттестации по результатам работы в течение семестра, применяется та же таблица, как и в предыдущем случае.

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

**3.1.4.1. Формируемые дисциплиной компетенции**

**ОПК-1** Способен находить, формулировать и решать актуальные проблемы фундаментальной и прикладной информатики и информационных технологий.

□ Формируется дисциплиной.

✓ Развивается дисциплиной.

□ Полностью сформирована по результатам освоения дисциплины.

Шкала оценивания: линейная, определяется долей успешно выполненных заданий, проверяющих данную компетенцию.

**ПКА-1** Способен находить, формулировать и решать актуальные проблемы фундаментальной и прикладной информатики и информационных технологий.

□ Формируется дисциплиной.

✓ Развивается дисциплиной.

□ Полностью сформирована по результатам освоения дисциплины.

Шкала оценивания: линейная, определяется долей успешно выполненных заданий, проверяющих данную компетенцию.

**ПКП-1** Способен демонстрировать фундаментальные знания математических и естественных наук, программирования и информационных технологий.

□ Формируется дисциплиной.

✓ Развивается дисциплиной.

□ Полностью сформирована по результатам освоения дисциплины.

Шкала оценивания: линейная, определяется долей успешно выполненных заданий, проверяющих данную компетенцию.

**ПКП-4** Способен преподавать дисциплины математики и информатики в различных учебных заведениях на основе полученного фундаментального образования и научного мировоззрения.

□ Формируется дисциплиной.

✓ Развивается дисциплиной.

□ Полностью сформирована по результатам освоения дисциплины.

Шкала оценивания: линейная, определяется долей успешно выполненных заданий, проверяющих данную компетенцию.

**ПКП-6** Способен использовать основные методы и средства автоматизации проектирования, реализации, испытаний и оценки качества при создании конкурентоспособного программного продукта и программных комплексов, а также способен использовать методы и средства автоматизации, связанные с сопровождением, администрированием и модернизацией программных продуктов и программных комплексов.

□ Формируется дисциплиной.

✓ Развивается дисциплиной.

□ Полностью сформирована по результатам освоения дисциплины.

Шкала оценивания: линейная, определяется долей успешно выполненных заданий, проверяющих данную компетенцию.

**ПКП-7** Способен использовать знания направлений развития компьютеров с традиционной (нетрадиционной) архитектурой; современных системных программных средств: операционных систем, операционных и сетевых оболочек, сервисных программ; тенденции развития функций и архитектур проблемно-ориентированных программных систем и комплексов в профессиональной деятельности.

□ Формируется дисциплиной.

✓ Развивается дисциплиной.

□ Полностью сформирована по результатам освоения дисциплины.

Шкала оценивания: линейная, определяется долей успешно выполненных заданий, проверяющих данную компетенцию.

**ПКП-8** Способен использовать основные концептуальные положения функционального, логического, объектно-ориентированного и визуального направлений программирования, методы, способы и средства разработки программ в рамках этих направлений.

□ Формируется дисциплиной.

✓ Развивается дисциплиной.

□ Полностью сформирована по результатам освоения дисциплины.

Шкала оценивания: линейная, определяется долей успешно выполненных заданий, проверяющих данную компетенцию.

**3.1.4.2. Контрольно-измерительные материалы (примеры)**

*Список обязательных к пониманию понятий и утверждений*

Пересечение, объединение множеств, булеан, отношение, функция, биномиальные коэффициенты, О-символика, формула Стирлинга, сигма-алгебра, мера, событие, вероятность (элементарный и общий случаи), случайная величина, математическое ожидание (элементарный и общий случаи), независимые и несовместные случайные величины.

*Примеры заданий в течение семестра*

(3б) Сформулируйте и докажите формулу включений-исключений в терминах множеств.

(3б) Найдите предел \lim\limits\_{n \to \infty}\frac{1^p + 2^p + ... + n^p}{n^{p+1}}, p \in \mathbb{N}

*Вопросы к экзамену "Асимптотический анализ"*

1. Множества и операции над ними. Отношения и функции.
2. Счетные и не более чем счетные множества.
3. О-символика.
4. Теорема Штольца (один вариант).
5. Элементарные оценки для комбинаторных величин.
6. Формула Стирлинга.
7. Оценки сумм биномиальных коэффициентов.
8. Замена сумм интегралами.
9. Рекуррентные соотношения и производящие функции.
10. Числа Фибоначчи. Формула Бинэ.
11. Производящие функции для биномиальных коэффициентов.
12. Экспоненциальные производящие функции. Формальная связь с обычными производящими функциями.
13. Числа Стирлинга и их применение.
14. Числа Белла.
15. Числа и многочлены Бернулли.
16. Сигма-алгебра, мера. Теорема Лебега.
17. Теорема Каратеодори. Теорема Радона-Никодима.
18. Классическая вероятность. Независимые и несовместные события.
19. Формулы полной вероятности и формула Байеса.
20. Случайные графы и множества.
21. Случайные величины. Математическое ожидание и дисперсия.
22. Неравенства Маркова и Чебышева.
23. Схема испытаний Бернулли
24. Закон больших чисел.
25. Парадокс Бертрана.
26. Метод Монте-Карло.
27. Распределения и их виды. Примеры.
28. Моменты случайных величин. Ковариация и корреляция
29. Центральная предельная теорема.

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

Для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса применяется анкетирование в соответствии с методикой и графиком, утвержденными в установленном порядке.

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К преподаванию дисциплины могут быть допущены преподаватели, имеющие диплом о высшем образовании по соответствующему направлению.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

Не требуется.

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Для аудиторий с маркерными досками необходимы стирающиеся маркеры в объёме, достаточном для проведения курса. Для аудиторий с меловыми досками необходим мел в объёме, достаточном для проведения курса.

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Не требуется.

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Специализированное оборудование не требуется.

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

Специализированное программное обеспечение не требуется.

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Маркеры для доски, губка, мел.

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список обязательной литературы**

1. Феллер У. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 1.

2. Феллер У. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 2.

**3.4.2 Список дополнительной литературы**

Не требуется

**3.4.3 Перечень иных информационных источников**

1. Храбров А.И. Асимптотический анализ и теория вероятностей (осень 2016). Computer Science Center. Web: https://www.youtube.com/watch?v=C3xiaadF0eo&list=PLlb7e2G7aSpS634rDf15afbmKJRSYmH50
2. Н.И. Чернова. Теория вероятностей. Семестровый курс лекций. Web: https://nsu.ru/mmf/tvims/chernova/tv/lec/lec.html

**Раздел 4. Разработчики программы**

Храбров Александр Игоревич, К.ф.-м.н., Доцент кафедры математического анализа СПбГУ, aikhrabrov@mail.ru.

Смирнов Кирилл Константинович, ассистент кафедры информационно-аналитических систем СПбГУ, k.k.smirnov@spbu.ru